Symplectic構造の分解 (部分多様体の微分幾何学およびその周辺領域の研究)

坊向, 伸隆; 野田, 知宣

数理解析研究所講究録
第 1623 巻 2009 年 89-101

Symplectic 構造の分解 (Decompositions of symplectic structures)

坊向伸隆 [1] (Nobutaka BOUMUKI), 野田知宣 [2] (Tomonori NODA)

[1] 大阪市立大学数学研究所 (Osaka City University Advanced Mathematical Institute)

[2] 大阪歯科大学数学教室 (Department of Mathematics, Osaka Dental University)

1. 序

symplectic 幾何学は symplectic 構造を有した多様体[1]の性質を調べる数学の一分野であるが、物理学の側から云えばこれは古典力学の抽象的枠組みを与える（例えば Abraham–Marsden [1]、Guillemin–Sternberg [13] 参照）。多様体上の symplectic 構造は非退化性と可積分性を有した構造として定義された。これらの条件は $\Omega \in \Lambda^2$ を M 上の 2-形式として $\Omega^n \neq 0$ $(2n = \dim M)$ と $d\Omega = 0$ によって与えられる。このたった２つの仮定のみから古典力学を展開するに必要な結果（Hamilton 方程式や等価原理に相当する Darboux の定理、系に対称性があればそれに対応する保存量が存在する事を主張する Noether の定理など）が全て導かれる（とは云っても古典力学における symplectic 多様体は相空間であり、従って余接束であるが）。

古典力学を記述する枠組みは symplectic 幾何学によって完全に与えられる。物理学において次に行うのは電磁気学などの古典場の理論である。これらの数学的枠組みとしてここでは multisymplectic 構造と polysymplectic 構造を挙げておく。これらが、古典力学に対する symplectic 幾何学のような、古典場の理論の数学的枠組みの２大勢力であると思われるが[2]、どちらも現時点で暫定的である。multisymplectic 構造とは多様体上の非退化条件を満たす閉 k-形式として定義される（非退化性は k-形式により誘導される写像 $T_xM \to \Lambda^{k-1}T_x^*M$ が各点 $x \in M$ において単射である事を意味する）。symplectic における 2 が k に一般化された構造である。multisymplectic 構造を用いた（拘束のある）古典場理論の共変形式による定式化は重力理論や（ボソン）弦理論、Yang-Mills 理論とも相性が良い。これには内在的に定義される事と（共変）運動量写像を定められる事が重要となる[3]。しかしながら multisymplectic 構造は一般に Darboux の定理を満たさな

---

[1]本稿を通じて多様体は可微分性と連結性を仮定する。コンパクト性については必要な場合のみその都度言及する。

[2]古典場理論の symplectic 幾何学的取り扱いの主な方法は共変形式（multisymplecitc 構造）と instantaneous 形式（3+1）であるが、instantaneous 形式は与えられた時間の瞬間における場のなす無限次元空間を扱う。ここでは有限次元多様体上の構造である multisymplectic 構造、polysymplectic 構造を挙げた。

[3]運動量写像（またはその一般化）が如何に重要かをここでは述べきれないが、Gotay–Isenberg–Marsden による５部作 [8] 〜 [12] の Introduction には『momentum maps are everything』との言葉がある事を指摘しておく。因みに [11]、[12] は未発表と思われる。

いという古典論として致命的とも云える欠点がある。multisymplectic 構造を Darboux 型の定理が成立する形で定式化する事は open problem である。一方 polysymplectic 構造はベクトル空間に値を持つ非退化閉 2-形式として定められる。これと同系列の構造として k-symplectic 構造、k-almost cotangent 構造がある（これら 3 つの構造は余接束に対しては一致する)。これらの構造は一般の多様体上で定義されるものであるが、古典場の理論の為に導入された事もあってか、1970 年代から物理学または数理物理周辺の文献には登場するが、純粋数学としての研究は殆どされていないと思われる[4]。これらの構造に関する文献としては例えば Cantrijn–Ibort–de León [4]、García-Pérez–Pérez-Rendón [6]、Giachetta–Mangiarotti–Sardanashvily [7]、Gotay–Isenberg–Marsden [8] 〜 [11]、Günther [14]、de León–Marrero–Marín [15]、Norris [19] などを挙げておく。

いま挙げたような構造は symplectic 構造の拡張であるが、Hamilton 形式による定式化を目的にしていると云う意味においてこれは寧ろ『移行』である[5]。より広い意味での symplecitc 構造の拡張としては例えば Poisson 構造と presymplectic 構造が一般的である。これらの構造は symplectic 構造の 2 条件のうちの非退化性を仮定しない構造の反変版と共変版であり、Poisson 構造は多様体上の可積分条件を満たす 2-ベクトルとして、presymplectic 構造は可積分条件を満たす 2-形式として定められる。これらは非常に似ているが一般には異なる構造である。例えば Poisson 構造は数学・物理学のどちらでも登場するが、presymplectic 構造は物理学では殆どと云って良いほど現れない (Cariñena–Rañada [5]、Muñoz-Lecanda–Román-Roy [18]、Vignolo [24] などあるが)。この理由についてここでは『地に足がつかない』と述べておく（注意 2.5 でもう少しマシな理由を述べる)。これ以外の相違点については 2 節で追々述べていく。

さて、そろそろ本稿での目的を述べる。ここでは “退化した symplcctic 構造” である Poisson 構造と presymplectic 構造を 2 個考えることにより、補完する事で多様体上の非退化な構造、symplectic 構造を構成する事を考える。補完する構造としては異種のものはもちろん、同種のものも考える。不完全なものが他者の退化方向を補い合う事で非退化な構造を作るための条件と、それに関わる例を述べる事が目的である。その為に先ず次節において部品である Poisson 構造と presymplectic 構造の定義と性質から始める。

---

[4]ここで云う『純粋数学としての』とは対象となる多様体のコンパクト性が主である。ここで挙げた種々の構造は実質的に余接束の場合のみが扱われる事が殆どである。

[5]Hamilton 形式による定式化は解析力学のような理論的理由もさることながら、量子化を考える上でも重要である。物理学においては便利な処方箋があり、系の Hamilton 函数が判れば、物理量を適切な演算子で置き換えることで量子化が成される。この意味においても Hamilton 形式による定式化は重要である。因みに Lagrange 形式による古典場の理論の定式化はファイバー空間とその切断、およびそのジェット束による数学的枠組みがあり、これは暫定でなく確定のようである。

2. Poisson 構造と presymplectic 構造

本節では Poisson 構造と presymplectic 構造の定義と、これらの性質を述べ、類似点と相違点を纏める。先ずは Poisson 構造から始める。

2.1. Poisson 構造. symplectic 構造の退化版を反変表現したものが Poisson 構造である。定義を述べる為に幾つか準備をする。本小節については Vaisman [23] を参照の事とする。

M を多様体、$\mathfrak{X}^p$ で M 上の p-ベクトルの成す空間を表す。但し $\mathfrak{X}^0 = C^\infty(M)$ とする。このとき $X, Y, X_i \in \mathfrak{X}^1, Q \in \mathfrak{X}^q$ に対し

$$[X, Y] = L_X Y,$$

$$[X_1 \wedge \cdots \wedge X_p, Q] = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_p \wedge [X_i, Q],$$

を満たす括弧積 $[\ ,\ ] : \mathfrak{X}^p \times \mathfrak{X}^q \to \mathfrak{X}^{p+q-1}$ が存在する。この括弧積 $[\ ,\ ]$ を **Schouten-Nijenhuis 括弧積**と呼ぶ。ここで $[X_i, Q] = L_{X_i} Q$ は Lie 微分。M の局所座標を用いて

$$P = \frac{1}{p!} P^{i_1 \cdots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \in \mathfrak{X}^p, \qquad Q = \frac{1}{q!} Q^{j_1 \cdots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \in \mathfrak{X}^q$$

とすると $[P, Q]$ は

$$\begin{aligned}
[P, Q] = & \frac{(-1)^p}{p!q!} \left\{ \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} Q^{j_1 \cdots j_q} \frac{\partial P^{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^{j_s}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \right. \\
& \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \\
& - (-1)^p \sum_{t=1}^{p} (-1)^t P^{i_1 \cdots i_p} \frac{\partial Q^{j_1 \cdots j_q}}{\partial x^{i_t}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_t}}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \\
& \left. \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

と表される。この括弧積を用いて Poisson 構造を次のように定義する。

定義 2.1. 多様体 M 上の 2-ベクトル $\Pi \in \mathfrak{X}^2$ が

$$[\Pi, \Pi] = 0 \tag{2.2}$$

を満たすとき M の **Poisson 構造**と呼ぶ。Π を局所的に

$$\Pi = \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

と表したとき、Π が Poisson 構造である事は

$$\Pi^{si}\frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^s} + \Pi^{sj}\frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x^s} + \Pi^{sk}\frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^s} = 0$$

と同値である。

いま可積分条件 (2.2) を満たす 2-ベクトル Π を Poisson 構造と定めたが、Poisson 構造の定義はこれ以外にあり、そちらを定義とする事が多い (理由は (2.1) が複雑な事に依るように思う。Poisson 構造を定義するだけなら $p=q=2$ であり、この場合は簡単になるが)。次にそれを述べよう。$f,g \in C^\infty(M)$ とする。f,g の **Poisson 括弧積** $\{f,g\} \in C^\infty(M)$ を

$$\{f,g\} := \Pi(df,dg) = \Pi^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}$$

で定める。このとき Π が 2-ベクトルである事と可積分条件 (2.2) とから括弧積 $\{\ ,\ \}$ が

(i) $\{f,g\} = -\{g,f\}$,
(ii) $\{f, ag+bh\} = a\{f,g\} + b\{f,h\}$,
(iii) $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$,
(iv) $\{f,gh\} = g\{f,h\} + \{f,g\}h$

を満たす事が判る。但し $f,g,h \in C^\infty(M)$, $a,b \in \mathbb{R}$. 通常、Poisson 構造とはこれら (i) $\sim$ (iv) を満たす $C^\infty(M)$ の括弧積 $\{\ ,\ \}$ の事を云う。(i) $\sim$ (iii) により $(C^\infty(M),\{\ ,\ \})$ は Lie 環の構造を持ち、(iv) から $\{f,\cdot\}$ はベクトル場に対応する事が判る。これは $\{\ ,\ \}$ の定義において f,g の外微分を Π に代入している事に依る。2-ベクトルに入れるのであるから 1-形式とするのは必然であるが、これが Poisson 構造より導かれる重要な Hamilton 方程式を定めるのに大切である。Π は 2-ベクトルであるから、df の様な完全形式とは限らない 1-形式を入れることにより、各点 $x \in M$ において T_x^*M から T_xM への線型写像が定まる。これを $\Pi^\sharp$ と表すと $\alpha \in T_x^*M$ に対し

$$\begin{array}{rccc} \Pi^\sharp(x): & T_x^*M & \to & T_xM \\ & \alpha & \to & \Pi(\alpha,\cdot) \end{array}$$

である。$x \in M$ を動かすことにより M 上のベクトル場を得る。特に $f \in C^\infty(M)$ の外微分により定まる 1-形式 df に対して定まるベクトル場を ***f* の Hamilton ベクトル場**と呼び X_f で表す。即ち $X_f(x) = \Pi^\sharp(df)(x)$. これは Poisson 多様体に対する Hamilton 方程式であり、従って運動方程式であるから、Poisson 構造は力学を記述する資格を得たことになる (presymplectic 構造はそうではない。注意 2.5 参照)。写像 $\Pi^\sharp(x): T_x^*M \to T_xM$ は線型写像であるから、その階数を Π の $x \in M$ における**階数**

と呼び rank $\Pi(x)$ で表す。Poisson 構造の階数は常に偶数である。以下 rank $\Pi(x)$ は M 上で一定と仮定する。この仮定を満たす Π を **regular Poisson 構造**と呼ぶ。

次に $\Pi^\sharp$ の像について見る。

$$D(x) := \{X \in T_xM \ ; \ ^\exists f \in C^\infty(M) \text{ s.t. } X_f(x) = X\}$$

と定めると $\dim D(x)$ は M 上で一定であり $\mathcal{D} = \{D(x)\}_{x\in M} \subset TM$ は接分布を定める。更に条件 (2.2) からこれは involutive である事が判る。よって M の葉層が定まる。この葉層を **symplectic 葉層**と呼び $\mathcal{F}_\Pi$ で表す[6]。この葉層 $\mathcal{F}_\Pi$ の状態を見る為に regular Poisson 構造に対する Darboux の定理を述べておく。

命題 2.2 (Darboux の定理)**.** (M,Π) を regular Poisson 多様体とする。このとき任意の $x \in M$ に対し

$$\{x^i, x^j\} = \{y^i, y^j\} = \{z^i, z^j\} = 0, \quad \{x^i, y^j\} = \delta^{ij}, \quad \{x^i, z^j\} = \{y^i, z^j\} = 0$$

となる x の局所座標 $(x^1, \ldots, x^{r/2}, y^1, \ldots, y^{r/2}, z^1, \ldots, z^{n-r})$ が存在する。ここで $r =$ rank Π は Π の階数であり $n = \dim M$.

この補題において z^j =const. が葉層 $\mathcal{F}_\Pi$ の葉を定める。$\mathcal{F}_\Pi$ の各葉には Π より誘導される symplectic 構造が定まる。これが名前の由来である。また逆に、多様体の葉層の各葉に symplectic 構造が定まっており、これらが “滑らか” に繋がっていると Poisson 構造が定まる。[23, 2.14. Theorem] 参照。

2.2. presymplectic 構造. 本小節では presymplectic 構造の定義と性質を Poisson 構造の場合と平行して述べる。

定義 2.3. 多様体 M 上の 2-形式 $\omega \in \Lambda^2$ が

$$d\omega = 0 \tag{2.3}$$

を満たすとき M の **presymplectic 構造**と呼ぶ。

symplectic 構造は通常、共変形 : 非退化閉 2-形式として定義されるから、その定義における非退化性の条件を外したものとして presymplectic は定められる。presymplectic

[6] この葉層 $\mathcal{F}_\Pi$ の存在性には Poisson 構造の regular 性の仮定は必要ない。regular とは限らない一般の Poisson 構造に対しても一般化された葉層 $\mathcal{F}_\Pi$ が定まり、symplectic 葉層と呼ばれる。[23, 2.12. Theorem] 参照。

構造 ω は 2-形式であるから、各点 $x \in M$ において T_xM から T_x^*M への線型写像を定める。これを $\omega^\flat$ と表すと $X \in T_xM$ に対し

$$\begin{array}{rccc} \omega^\flat(x): & T_xM & \to & T_x^*M \\ & X & \to & \omega(X,\cdot) \end{array}$$

である。$\omega(X,\cdot)$ は $i_X\omega$ とも書かれる。写像 $\omega^\flat(x) : T_xM \to T_x^*M$ は線型写像であるから、その階数を ω の $x \in M$ における**階数**と呼び rank $\omega(x)$ で表す。rank $\omega(x)$ は常に偶数である事に注意する。以下 rank $\omega(x)$ は M 上で一定と仮定する[7]。

次に $\omega^\flat$ の核について見る。

$$V(x) := \{X \in T_xM \ ; \omega^\flat(X)(x) = 0\}$$

と定めると $\dim V(x)$ は M 上で一定であり $\mathcal{V} = \{V(x)\}_{x\in M} \subset TM$ は接分布を定める。更に条件 (2.3) からこれは involutive である事が判る。よって M の葉層が定まる。この葉層を **null 葉層**（または vertical foliation）と呼び $\mathcal{F}_\omega$ で表す。この葉層 $\mathcal{F}_\omega$ の状態を見る為に presymplectic 構造に対する Darboux の定理を述べておく。

命題 2.4 (Darboux の定理)**.** (M,ω) を presymplectic 多様体とする。このとき任意の $x \in M$ に対し

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}(x^1,\dots,x^r)dx^i \wedge dx^j$$

となる x の局所座標 $(x^1,\dots,x^r,x^{r+1},\dots,x^n)$ が存在する。ここで $r = \mathrm{rank}\,\omega$ は ω の階数であり $n = \dim M$.

この補題において x^i =const. $(1 \le i \le r)$ が葉層 $\mathcal{F}_\omega$ の葉を定める。

注意 2.5. presymplectic 多様体上の函数 f に対し Hamilton 方程式を symplectic の場合と同様に

$$i_{X_f}\omega = df \tag{2.4}$$

としてみると、これは無条件では well-defined でない。この方程式が well-defined である為には Hamilton 函数 f を

$$f \in C^\infty(M)^N := \{f \in C^\infty(M) \ ; \ f|_N = \text{const.}\}$$

に制限する必要がある。ここで N は null 葉層 $\mathcal{F}_\omega$ の任意の葉[8]。更に $f \in C^\infty(M)^N$ としてもベクトル場 X_f は一意的には定まらない。このように presymplectic 多様体上

[7]presymplectic 構造の定義に階数一定を入れる場合もある。例えば Souriau [20].

[8]例えば null 葉層の葉が稠密に入っている場合、Hamilton 函数としては定数函数のみが可能となる。

では Hamilton 方程式を立てる時点でかなりの制約が課される。一方 Poisson 構造ではこのような制約は付かなかった。Poisson 構造は物理学で現れ、presymplectic 構造が物理学では殆ど現れない理由の一つであろう。Hamilton 方程式 (2.4) が well-defined であっても、解は一意ではない上に、構造が非退化である空間を得るためには null 葉層の葉空間、即ち商と云う抽象操作を経る必要がある。これを序では『地に足がつかない』と表現した。これは認知できない微小な Calabi-Yau 空間が各点にくっついている事とは次元が違う。因みに (2.4) を満たす X_f, X'_f に対しこれらの差 $X_f - X'_f$ を **gauge ベクトル場**と呼ぶ。

2.3. **これまでの纏め.** 前 2 小節にて Poisson 構造と presymplectic 構造の定義とそれらの性質を簡単に見てきた。本小節ではこれらの類似点と相違点を纏める。

(i): Poisson 構造、presymplectic 構造とも 2 階のテンソルであるが、一方は反変テンソル（2-ベクトル）であり他方は共変テンソル（2-形式）である。

(ii): Poisson 構造、presymplectic 構造とも可積分条件を満たす。

(iii): 両構造とも接空間と余接空間の間の写像を定めるが、Poisson 構造は余接空間から接空間であり、presymplectic 構造は接空間から余接空間と写像の向きに違いがある。

(iv): 両構造とも多様体上に葉層を定めるが、これらの葉の向きに違いがある。Poisson 構造では線型写像 $\Pi^\sharp$ の像として、presymplectic 構造では線型写像 $\omega^\flat$ の核として定められる。よって定まる葉層は Poisson 構造の場合は構造が非退化である方向に葉があり symplectic 葉層を定める。presymplectic 構造では構造が退化している方向に葉があり null 葉層を定める。

これら類似点と相違点を次の表に纏めておく。

	Poisson Π	presymplectic ω
(i)	2-vector	2-form
(ii)	$[\Pi, \Pi] = 0$	$d\omega = 0$
(iii)	$\Pi^\sharp : T_x^*M \to T_xM$	$\omega^\flat : T_xM \to T_x^*M$
(iv)	$\mathrm{Im}\ \Pi^\sharp \subset TM$	$\mathrm{Ker}\ \omega^\flat \subset TM$
(v)	symplectic foliation $\mathcal{F}_\Pi$	null foliation $\mathcal{F}_\omega$

ここで述べた以外にも、例えばどちらも頭文字は 16 番目のアルファベット P であるが大文字 P と小文字 p の違いなど、類似点・相違点はあるが略する。

3. SYMPLECTIC 構造の分解

前節では Poisson 構造、presymplectic 構造の類似点と相違点を述べた。これは多様体上にこれらの構造が独立に存在する場合である。本節ではこれらの構造の関係を論じる。先ずは異なる２つの構造が同一である場合を述べ、次いで補完について述べる。先ずは同じものを定める状態から。次のように定義する。

定義 3.1. Poisson 構造 Π と presymplectic 構造 ω は

$$\Pi^\sharp \circ \omega^\flat|_{\mathrm{Im}(\Pi^\sharp)} = \mathrm{id}, \quad \omega^\flat \circ \Pi^\sharp|_{\mathrm{Im}(\omega^\flat)} = \mathrm{id}$$

が成立するときに**両立する**（compatible）と云う。但し $\Pi^\sharp : TM \to T^*M$, $\omega^\flat : T^*M \to TM$ はそれぞれの構造から誘導される接束 TM と余接束 T^*M の間の（線型）写像。

両立する Poisson 構造と presymplectic 構造の組 (Π, ω) を **horsymplectic** 構造とよぶ。De Barros [2], Vaisman [22] 参照。また Blaszak–Marciniak [3] の dual P-p 構造は更に付加条件が付く。Poisson 構造、presymplectic 構造ともに接束と余接束の間の写像を定めるが、退化している事により逆の対応を構成する事が出来ない。そこで接束・余接束を非退化方向と退化方向とに直和分解し、定義域を制限することで逆向きの写像を作れる状況にしている。両立する構造の存在性については次が成立する。

補題 3.2. (i) Π を多様体 M 上の Poisson 構造、$\mathcal{F}_\Pi$ を定める接分布を $\mathcal{D} = \{D(x)\}_{x\in M}$ とする。involutive な接分布 $\mathcal{V} = \{V(x)\}_{x\in M} \subset TM$ で任意の $x \in M$ において $D(x) \oplus V(x) = T_xM$ となるものが存在するなら Π と両立する presymplectic 構造が存在する。

(ii) ω を多様体 M 上の presymplecitc 構造、$\mathcal{F}_\omega$ を定める接分布を $\mathcal{V} = \{V(x)\}_{x\in M}$ とする。involutive な接分布 $\mathcal{D} = \{D(x)\}_{x\in M} \subset TM$ で任意の $x \in M$ において $D(x) \oplus V(x) = T_xM$ となるものが存在するなら ω と両立する Poisson 構造が存在する。

次に本稿の目的である補完について述べる。これは退化した構造を２個用いて多様体上の非退化な構造を構成することであるが、これを退化した構造それぞれの定める葉層の状態によって記述する。そこで多様体の葉層についての記号を準備する。一般に多様体 M の２つの葉層 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ が与えられたとする。それぞれの葉層の点 $x \in M$ における葉の接空間を $D_1(x), D_2(x)$ で表す。このとき $D_1(x) = D_2(x)$ が任意の x に対して成立するとき $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ と表し、$D_1(x) \oplus D_2(x) = T_xM$ が任意の x に対して成立するとき $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 = M$ と表す事にする。これらの準備のもとで補完について述べる。次の定理の (i), (ii) が同種のものによる場合であり (iii) が異種のものの場合である。

定理 3.3. (i) Π_i, $i=1,2$, を M 上の regular Poisson 構造、$\mathcal{F}_{\Pi_i}$ を Π_i の定める M の葉層とする。$\mathrm{rank}(\Pi_1)+\mathrm{rank}(\Pi_2)=\dim M$ と仮定する。このとき $\mathcal{F}_{\Pi_1}\oplus\mathcal{F}_{\Pi_2}=M$ ならば Π_i, $i=1,2$, から M 上の symplectic 構造が定まる。

(ii) ω_i, $i=1,2$, を M 上の階数一定の presymplectic 構造、$\mathcal{F}_{\omega_i}$ を ω_i の定める M の葉層とする。$\mathrm{rank}(\omega_1)+\mathrm{rank}(\omega_2)=\dim M$ と仮定する。このとき $\mathcal{F}_{\omega_1}\oplus\mathcal{F}_{\omega_2}=M$ ならば ω_i, $i=1,2$, から M 上の symplectic 構造が定まる。

(iii) Π と ω を M 上の regular Poisson 構造と階数一定の presymplectic 構造、$\mathcal{F}_\Pi$ と $\mathcal{F}_\omega$ を Π と ω の定める M の葉層とする。$\mathrm{rank}(\Pi)+\mathrm{rank}(\omega)=\dim M$ と仮定する。このとき $\mathcal{F}_\Pi=\mathcal{F}_\omega$ が成立し更に TM の involutive な接分布 H で H の定める M の葉層 $\mathcal{F}_H$ が $\mathcal{F}_\Pi\oplus\mathcal{F}_H=M$ を満たすようなものが存在するならば Π と ω から M 上の symplectic 構造が定まる。

(iv) 逆に symplectic 多様体 (M,Ω) に葉層 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ で Ω の各葉への制限が非退化なものが存在し、$\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2=M$ を満たすなら M 上の Poisson 構造 Π_1,Π_2 と presymplectic 構造 ω_1,ω_2 で Π_1 と ω_1、Π_2 と ω_2 が両立するものが存在する。

退化した構造を２つ用いて非退化な構造を構成する事を考えた場合、同種・異種で (i) 〜 (iii) の３通りが考えられるが、(i) 〜 (iii) のいずれの一つから出発しても (iv) を経由する事で残りの２つが得られる事になる。そしてそれは (iv) と同値である事が判る。そこで次のように定義をする。

定義 3.4. Ω を多様体 M 上の symplecitc 構造とする。M の葉層 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ で

- Ω の各葉への制限が非退化；
- $\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2=M$

を満たすもの組 $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ を **Ω の分解**（decomposition）と呼ぶ。また $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ の全ての葉がコンパクトのとき分解 $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ を**コンパクト**な分解と呼ぶ。

注意 3.5. (1) Poisson 構造の dual pair とここでの分解（特に定理 3.3 (i) ）とは異なる事に注意する。Lie-Weinstein pair は各点で symplectic orthogonal になっているが、ここでの分解ではそうでない例を構成出来る。dual pair については Montaldi–Ortega–Ratiu [17]、Weinstein [25] を参照の事。

(2) 葉層の葉の状態により、定理 3.3 (i), (ii), (iii) 以外に

(v) $\mathcal{F}_{\Pi_1}\oplus\mathcal{F}_{\omega_1}=M$,　　(vi) $\mathcal{F}_{\Pi_1}=\mathcal{F}_{\Pi_2}$,　　(vii) $\mathcal{F}_{\omega_1}=\mathcal{F}_{\omega_2}$,

も考えられるが、これらだけでは symplectic 構造を定める事は出来ないのでここではこれ以上は述べない。

4. 例と主結果

前節で symplectic 構造の分解の定義を述べた。本節では分解の例と本稿の主結果（定理 4.2）を述べる。先ずは簡単な例から始める。

例 4.1. (i) M を複素射影空間の直積とする：$M = \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$. このとき $\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^m$ それぞれの Fubini-Study 計量より誘導される symplectic 構造を ω_1, ω_2 として $\Omega = -\omega_1 + \omega_2$ と定める[9]と (M, Ω) は symplectic 多様体であり、葉が複素射影空間であるような Ω のコンパクトな分解を得る（より一般にコンパクト symplecitc 多様体の直積からコンパクトな分解が得られる)。

(ii) $T^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ を実 4 次元トーラスとすると、(i) と同様に $T^4 = T^2 \times T^2$ としてコンパクトな分解が得られる。また、この葉層を定める葉（接分布）を傾きが無理数となるようにする事でコンパクトな T^4 のコンパクトでない分解が得られる。

以下 M がコンパクトな場合のみを考える。(M, Ω) をコンパクト symplectic 多様体とする。このとき M の第二 Betti 数は 1 以上である：$b_2 \geq 1$. いま $b_2 = 1$ とすると Ω の分解としては自明なものしか存在しない事が判る。但し葉層の組 $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ においてどちらか一方の葉層が点葉層、即ち葉の次元が 0 の分解を**自明**な分解と定める。よって非自明な分解が存在する為には $b_2 \geq 2$ である必要がある。そこで $b_2 = 2$ の場合を考える。上の例 4.1 (i) の M は $b_2 = 2$ である。これは明らかにコンパクトな分解が存在している。M がコンパクトの場合に $b_2 = 2$ はコンパクトな分解の存在する為の充分条件かを問う事は自然であろう。この問いに対する一つの回答として、次の定理を述べる。

定理 4.2. コンパクト Kähler 等質空間 $(G_2/H, \Omega)$ 上には自明なもの以外には Ω の不変かつコンパクトな分解は存在しない。

この定理で H としては $U(2)$ と T^2 の場合がある。$H = U(2)$ の場合、即ち $M = G_2/U(2)$ の第二 Betti 数は 1 であるので、自明な分解しか存在しない。一方 $H = T^2$ の場合、$M = G_2/T^2$ の第二 Betti 数は 2 である。不変との条件を課せば、$b_2 = 2$ はコンパクトな分解の存在する為の充分条件でない事を定理 4.2 は示している。

以下でこの定理の証明の概略を述べる。先ず次の補題を用いる。

補題 4.3. $\mathcal{D} = \{D(x)\}_{x \in G_2/H}$ を G_2/H 上の非自明な不変可積分接分布、$L(o)$ を $\mathcal{D}$ の定める葉層の葉で原点 o を通るものとする。$L(o)$ がコンパクトなら

(i) $H \subsetneq K \subsetneq G_2$,

(ii) $D(x) = d\tau_g(T_o(K/H)), \ {}^\forall x = \tau_g(o) \in G_2/H$,

[9] 精確には M からそれぞれへの射影による引き戻しであるが、同一視する。

を満たす G_2 の最大階数部分群 K が存在する。但し $\tau_g(aH) = gaH : G_2/H \to G_2/H$ は $g \in G_2$ により誘導される G_2/H の変換を表す。

$H = U(2)$ の場合、この補題の K としては $K = SU(3),\ SU(2) \times SU(2)$ となる。$\dim G_2/U(2) = 10$ から $G_2/U(2)$ の不変でコンパクトな分解は（自明な場合を除き）存在しない事が判る（これは $b_2 = 1$ からも判る）。

$H = T^2$ の場合、$K = SU(3),\ SU(2) \times SU(2),\ U(2)$ となる。このとき $\dim G_2/T^2 = 12$ であるから、分解を与える葉層の葉が共に $SU(3)/T^2$ の場合のみ可能性が残る。しかしながら、この場合は次の補題により除外される：

補題 4.4. $\mathcal{D} = \{D(x)\}_{x \in G_2/T^2} = \{d\tau_g(T_o(SU(3)/T^2))\}_{\tau_g(o) \in G_2/T^2}$ を不変可積分接分布、$\mathcal{D}' = \{D'(x)\}_{x \in G_2/T^2}$ を不変接分布とする。$T_o(G_2/T^2) = D(o) \oplus D'(o)$ なら $\mathcal{D}'$ は可積分とはならない。

補題 4.4 の証明：G_2 の Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ を

$$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{t}^2 \oplus \bigoplus_{j=1}^{6} V_{\theta_j}$$

と分解する。ここで $\mathfrak{t}^2$ は極大トーラス T^2 の Lie 環であり V_{θ_j} は 2 次元の ad $\mathfrak{t}^2$-不変部分空間。このとき $\bigoplus V_{\theta_j}$ の基底 $\{X_{1,j}, X_{2,j}\}_{j=1}^{6}$ と $\theta_j : \mathfrak{t}^2 \to \mathbb{R}$ で

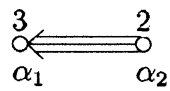
$$\mathrm{ad}(Z)Y = (X_{1,j}\ X_{2,j}) \begin{pmatrix} 0 & -\theta_j(Z) \\ \theta_j(Z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad Z \in \mathfrak{t}^2,\ Y = \lambda X_{1,j} + \mu X_{2,j} \in V_{\theta_j},$$

となるものが存在する (cf. Toda and Mimura [21, Chapter 5])。

$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ を $\Delta^+ := \{\theta_j\}$ の単純ルートとする。このとき

$$\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2\}.$$

但し $\{\alpha_1,\ \alpha_2\}$ の Dynkin 図形は

$\mathfrak{g}_2$:


とする。いま $T_o(G_2/T^2) \cong \bigoplus_{j=1}^{6} V_{\theta_j}$ と同一視する。D, D' の不変性から、$D(o),\ D'(o)$ は $V_{\theta_j},\ \theta_j \in \Delta^+$, の結合で表せる。$\Delta^+$ のルートの結合で $\mathfrak{su}(3)$ を生成するものは 5 択ある。それに伴って $D(o)$ も 5 択となるが、$D(o)$ の可積分性から $D(o) = \mathfrak{su}(3)/\mathfrak{t}^2 = V_{3\alpha_1+\alpha_2} \oplus V_{3\alpha_1+2\alpha_2} \oplus V_{\alpha_2}$ の場合のみ起こり得る。これより $D'(o) = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus V_{2\alpha_1+\alpha_2}$ となるが、これは $[D'(o), D'(o)] \not\subset \mathfrak{t}^2 \oplus D'(o)$、即ち可積分でない。

これにより補題 4.4 が証明され、故に定理 4.2 を得る。

注意 4.5. (1) 定理 4.2 ではコンパクトな分解の存在しないものについて述べた。変換群を $SU(\ell+1)$ とするコンパクト Kähler 等質空間[10]

$$(M,\Omega)=(SU(\ell+1)/S(\bigotimes_{p=1}^{k+1}U(i_p-i_{p-1})),\Omega)$$

の場合に本稿で考えた 2 つの葉層による分解の存在は不明である。しかしながらこの空間には 3 つの葉層による分解が存在する。

(2) 定理 4.2、特に補題 4.4 の証明において Lie 環のルート理論を使用している。定理 4.2 はより幾何学的に、6 次元球面は symplectic 構造を許容しない事を用いて証明する事も可能であるが、本稿ではルート理論を使用している。Kirillov-Kostant-Souriau 形式を備えたコンパクト等質 symplectic 多様体（余随伴軌道）に対し、分解の存在・非存在ひいてはコンパクト不変分解の同値類集合の決定を目的としている為に、このような手法を用いた。

References

[1] R. Abraham and J.E. Marsden : Foundations of Mechanics, 2nd edition, Reading, Massachusetts, 1978.

[2] C.M. de Barros : Sur la géometrie différentielle des formes différentielles extérieures quadratiques, In: Atti Convegno Intern. Geometria Differenziale, Bologna 1967, 117–142, Bologna: Ed. Zanichelli.

[3] M. Blaszak and K. Marciniak : Dirac reduction of dual Poisson-presymplectic pairs, J. Phys. A **37** (2004), no. 19, 5173–5187.

[4] F. Cantrijn, A. Ibort and M. de León : Hamiltonian structures on multisymplectic manifolds. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 54, 3 (1996), 225-236.

[5] J.F. Cariñena and M.F. Rañada : Comments on the presymplectic formalism and the theory of regular Lagrangians with constraints. J. Phys. A 28 (1995), no. 3, L91–L97.

[6] P.L. García-Pérez and A. Pérez-Rendón : Symplectic approach to the theory of quantized fields, I. Comm. Math. Phys. 13 (1969), 24-44.

[7] G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily : Polysymplectic Hamiltonian formalism and some quantum outcomes, hep-th/0411005.

[8] M. J. Gotay, J. Isenberg and J. E. Marsden : Momentum maps and classical relativistic fields. I: Covariant field theory, arXiv:physics/9801019v2.

[9] M. J. Gotay, J. Isenberg and J. E. Marsden : Momentum Maps and Classical Relativistic Fields. Part II: Canonical Analysis of Field Theories, arXiv:math-ph/0411032.

[10] M. J. Gotay, J. Isenberg and J. E. Marsden : Momentum Maps and Classical Relativistic Fields. Part III: Gauge Symmetries and Initial Value Constraints.

[10] $\ell\geq 0$, $0\leq k\leq\ell$、$0=:i_0<i_1<\cdots<i_{k+1}:=\ell+1$ を上手く選ぶ事で $SU(\ell+1)/H$ の形の Kähler 等質空間は全て得られる。

[11] M. J. Gotay, J. Isenberg and J. E. Marsden : Momentum Maps and Classical Relativistic Fields. Part IV: Adjoint Formalism.

[12] M. J. Gotay, J. Isenberg and J. E. Marsden : Momentum Maps and Classical Relativistic Fields. Part V: Palatini Gravity.

[13] V. Guillemin and S. Sternberg : Symplectic techniques in Physics, Cambridge Uviv. Press, Cambridge, 1984.

[14] Ch. Günther : The polysymplectic Hamiltonian formalism in field theory and calculus of variations I: The local case, J. Differential Geom., **25** (1987), 23-53.

[15] M. de León, J.C. Marrero and J. Marín : A geometrical approach to Classical Field Theories : a constraint algorithm for singular theories, In : New evelopments in Differential Geometry (Debrecen, 1994), Math. Appl., **350**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, pp. 291–312.

[16] A. Lichnerowicz : Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, J. Differential Geom. **12** (1977), 253–300.

[17] J. Montaldi, J.-P. Ortega and T.S. Ratiu : The relation between local and global dual pairs, Math. Res. Lett. 11 (2004), no. 2-3, 355–363.

[18] M.C. Muñoz-Lecanda and N. Román-Roy : Gauge systems: presymplectic and group action formulations, Internat. J. Theoret. Phys. 32 (1993), no. 11, 2077–2085.

[19] L.K. Norris : Generalized Symplectic Geometry on the Frame Bundle of a Manifold, In Proc. Symp. Pure Math., **54** (1993), R.E. Green and S.T. Yau eds., 435–466.

[20] J.-M. Souriau : Structure des systèmes dynamiques, Maîtrises de mathématiques Dunod, Paris 1970.

[21] H. Toda and M. Mimura :Topology of Lie groups, I and II, American Mathematical Society, Providence-Rhode Island, 1991.

[22] I. Vaisman : Geometric quantization on presymplectic manifolds, Monatsh. Math. **96** (1983), no. 4, 293–310.

[23] I. Vaisman : Lectures on the geometry of Poisson manifolds, Progress in Mathematics, 118. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[24] S. Vignolo : A new presymplectic geometrical framework for time-dependent Lagrangian systems: the constraint algorithm and the second-order differential equation problem, J. Phys. A 33 (2000), no. 28, 5117–5135.

[25] A. Weinstein : The local structure of Poisson manifolds, J. Differential Geom., 18 (1983), 523–557. Errata and addenda: J. Differential Geom., 22(2), 255 (1985).